



ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
УПРАВЛЕНИЕ ЦИФРОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
Кафедра «Строительная механика и теория сооружений»

Методические указания для самостоятельной работы и выполнения расчетно-графической работы №1

«Теоретическая механика»

Авторы
Высоковский Д. А.,
Савельева Н. А.

Ростов-на-Дону, 2024

Аннотация

Теоретическая механика: методические указания для самостоятельной работы и выполнения расчетно-графической работы №1 для обучающихся по направлению 08.05.01 «Строительство уникальных зданий и сооружений».

Представлены примеры решения заданий по каждой теме практических занятий разделов «Статика» и «Кинематика». Каждая тема предваряется кратким изложением теоретических вопросов необходимых для решения задач.

Авторы

доцент, к.т.н., доцент кафедры «Техническая механика»

Высоковский Д.А.

ассистент кафедры «Техническая механика»

Савельева Н.А.





Оглавление

ВЫБОР ВАРИАНТОВ, ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТ, ПОЯСНЕНИЯ К ТЕКСТУ ЗАДАЧ.....	4
Задача 1	6
Задача 2	11
Задача 3	17
Задача 4	23
Задача 5	28

ВЫБОР ВАРИАНТОВ, ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТ, ПОЯСНЕНИЯ К ТЕКСТУ ЗАДАЧ

Студенты выполняют 5 контрольных заданий.

К каждой задаче дается 10 рисунков и таблица (с тем же номером, что и задача), содержащая дополнительные к тексту задачи условия. Номера условий от 0 до 9 проставлены в 1-м столбце таблицы.

Студент во всех задачах выбирает номер рисунка по предпоследней цифре шифра, а номер условия в таблице – по последней; например, если шифр оканчивается числом 46, то берутся рис. 4 и условия № 6 из таблицы.

Каждое задание выполняется на отдельном листе формата А4. Контрольная работа должна иметь титульный лист, на котором указываются: название учебного заведения, название дисциплины, номер работы, название группы, фамилия и инициалы студента, учебный шифр, фамилия преподавателя, город и год.

На листе с решением сверху указывается номер задачи, далее делается чертеж (можно карандашом) и записывается, что в задаче дано и что требуется определить (текст задачи не переписывается). *Чертеж выполняется с учетом условий решаемого варианта задачи;* на нем все углы, действующие силы, число тел и их расположение на чертеже должны соответствовать этим условиям.

Чертеж должен быть аккуратным и наглядным, а его размеры должны позволять ясно показать все силы или векторы скорости и ускорения и др.; показывать все эти векторы и координатные оси на чертеже, а также указывать единицы получаемых величин *нужно обязательно*. Решение задач необходимо сопровождать краткими пояснениями (какие формулы или теоремы применяются, откуда получаются те или иные результаты и т. п.) и *подробно излагать весь ход расчетов*. На каждой странице следует оставлять поля для замечаний рецензента.

Работы, не отвечающие всем перечисленным требованиям, проверяться не будут, а будут возвращаться для переделки.

При чтении текста каждой задачи учесть следующее. Большинство рисунков дано без соблюдения масштабов. Также без оговорок считается, что все нити (веревки, тросы) являются нерастяжимыми и невесомыми, нити, перекиннутые через блок, по блоку не скользят, катки и колеса катятся по плоскостям без скольжения. Все связи, если не сделано других оговорок, считаются идеальными.

Когда тела на рисунке пронумерованы, то в тексте задач и в таблице P_1, l_1, r_1 и т. п. означают вес или размеры тела 1; P_2, l_2, r_2 – тела 2 и т. д. Аналогично, в v_B, a_B означают скорость и ускорение точки B ; v_C, a_C – точки C ; ω_1, ε_1 – угловую скорость и угловое ускорение тела 1, ω_2, ε_2 – тела 2 и т. д. В каждой задаче подобные обозначения могут тоже специально не оговариваться.

Следует также иметь в виду, что некоторые из заданных в условиях задачи величин (размеров) при решении каких-нибудь вариантов могут не понадобиться, они нужны для решения других вариантов задачи.

Из всех пояснений в тексте задачи обращайтесь внимание только на относящиеся *к вашему варианту*, т. е. номеру вашего рисунка или вашего условия в таблице.

Методические указания по решению задач, входящих в контрольные задания, даются для каждой задачи под рубрикой «Указания», затем дается пример решения аналогичной задачи. Цель примера – разъяснить ход решения, но не воспроизвести его полностью. Поэтому в ряде случаев промежуточные расчеты опускаются. *Но при выполнении задания все преобразования и числовые расчеты должны быть обязательно последовательно проделаны с необходимыми пояснениями*; в конце должны быть даны ответы.

ЗАДАЧА 1

Указания: для равновесия плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы сумма алгебраических проекций всех сил этой системы на каждую из двух произвольно выбранных координатных осей равнялась нулю и чтобы сумма их алгебраических моментов относительно произвольной точки также равнялась нулю. При вычислении момента силы \vec{F} часто удобно разложить ее на составляющие \vec{F}' и \vec{F}'' , для которых плечи легко определяются, и воспользоваться теоремой Вариньона; тогда

$$m_\alpha(\vec{F}) = m_\alpha(\vec{F}') + m_\alpha(\vec{F}'').$$

Пример 1. Жесткая пластина $ABCD$ (рис. 1) имеет в точке A неподвижную шарнирную опору, а в точке B – подвижную шарнирную опору на катках. Все действующие нагрузки и размеры показаны на рисунке.

Дано: $F = 25$ кН, $\alpha = 60^\circ$, $P = 18$ кН, $\gamma = 75^\circ$, $M = 50$ кН·м, $\beta = 30^\circ$, $a = 0,5$ м. Определить: реакции в точках A и B , вызываемые действующими нагрузками.

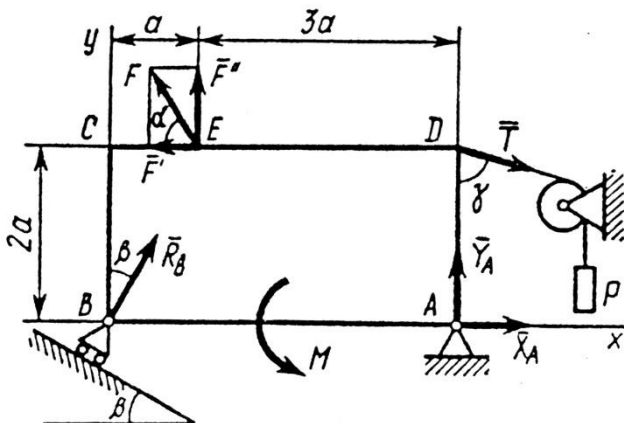


Рис. 1

Решение. 1. Рассмотрим равновесие пластины. Проведем координатные оси x и y и изобразим действующие на пластину силы: силу \vec{F} , пару сил с моментом M , натяжение троса \vec{T} (по

модулю $\bar{T} = P$) и реакции связей $\bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{R}_B$ (реакцию неподвижной шарнирной опоры A изображаем двумя ее составляющими, реакция шарнирной опоры на катках направлена перпендикулярно опорной плоскости).

2. Для полученной плоской системы сил составим три уравнения равновесия. При вычислении момента силы \bar{F} относительно точки A воспользуемся теоремой Вариньона, т. е. разложим силу на составляющие \bar{F}', \bar{F}'' ($F' = F \cos \alpha$, $F'' = F \sin \alpha$) и учтем, что $m_A(\bar{F}) = m_A(F') + m_A(F'')$. Получим:

$$\sum F_{kx} = 0, \quad X_A + R_B \sin \beta - F \cos \alpha + T \sin \gamma = 0; \quad (1)$$

$$\sum F_{ky} = 0, \quad Y_A + R_B \sin \beta + F \sin \alpha - T \cos \gamma = 0; \quad (2)$$

$$\sum m_A(\bar{F}_k) = 0, \quad M - R_B \cos \beta \cdot 4a + F \cos \alpha \cdot 2a - F \sin \alpha \cdot 3a - T \sin \gamma \cdot 2a = 0. \quad (3)$$

Подставив в составленные уравнения числовые значения заданных величин и решив эти уравнения, определим искомые реакции.

Ответ: $X_A = -8,5$ кН; $Y_A = -23,3$ кН; $R_B = 7,3$ кН. Знаки \bar{X}_A и \bar{Y}_A указывают, что силы \bar{X}_A и \bar{Y}_A направлены противоположно показанным на рис. 1.

Условие.

Жесткая рама, расположенная в вертикальной плоскости (рис. 1.0 – 1.9, табл.1), закреплена в точке A шарнирно, а в точке B прикреплена или к невесомому стержню с шарнирами на концах, или к шарнирной опоре на катках.

В точке C к раме привязан трос, перекинутый через блок и несущий на конце груз весом $P = 25$ кН. На раму действуют пара сил с моментом $M = 100$ кНм и две силы, значения, направления и точки приложения которых указаны в таблице (например, в условиях № 1 на раму действует сила под углом 15° к горизонтальной оси, приложенная в точке D , и сила под углом 60° к горизонтальной оси, приложенная в точке E , и т. д.).

Определить реакции связей в точках A, B , вызываемые действующими нагрузками. При окончательных расчетах принять $a = 0,5$ м.

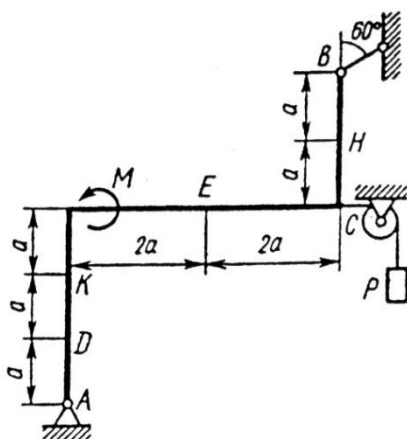


Рис.1.0

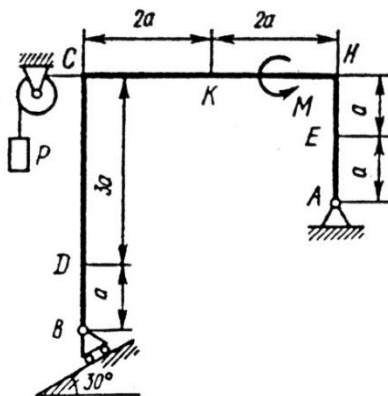


Рис.1.1

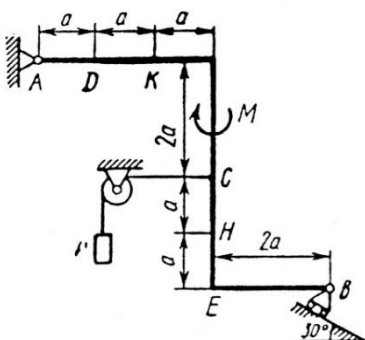


Рис.1.2

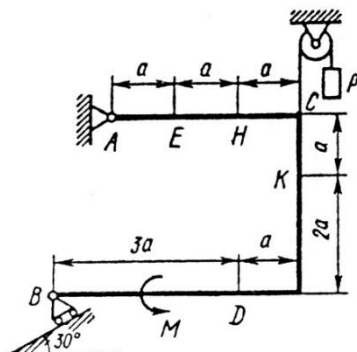


Рис.1.3

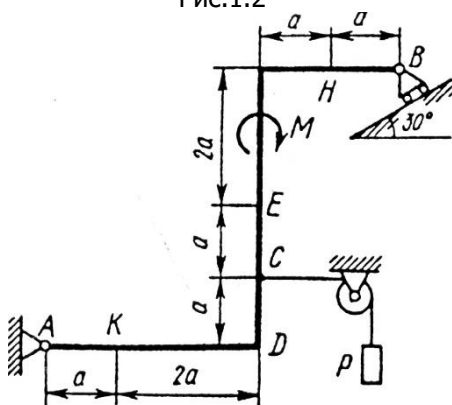


Рис. 1.4

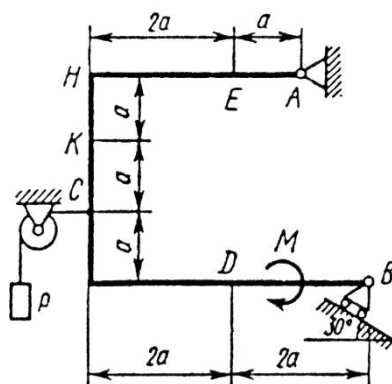


Рис. 1.5

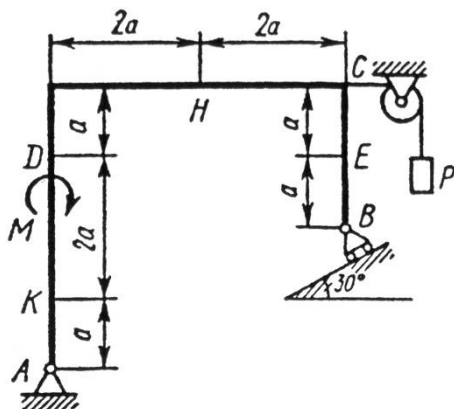


Рис. 1.6

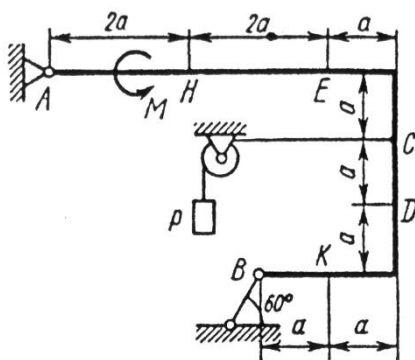


Рис. 1.7

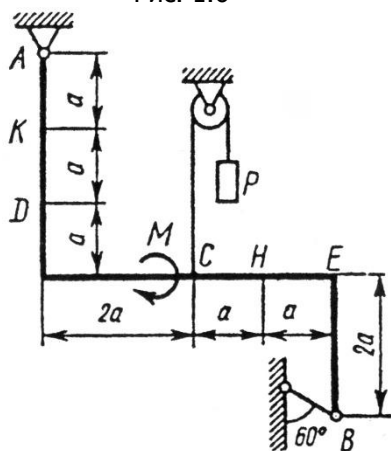


Рис. 1.8

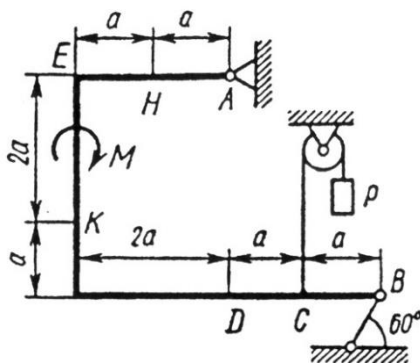

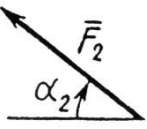
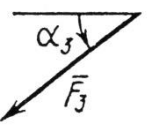
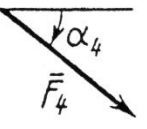


Рис. 1.9

Таблица 1

Силы								
	$F_1 = 10 \text{ кН}$		$F_2 = 20 \text{ кН}$		$F_3 = 30 \text{ кН}$		$F_4 = 40 \text{ кН}$	
	Точка приложения	α_1 , град	Точка приложения	α_2 , град	Точка приложения	α_3 , град	Точка приложения	α_4 , град
0	H	30	–	–	–	–	K	60
1	–	–	D	15	E	60	–	–
2	K	75	–	–	–	–	E	30
3	–	–	K	60	H	30	–	–
4	D	30	–	–	–	–	E	60
5	–	–	H	30	–	–	D	75
6	E	60	–	–	K	15	–	–
7	–	–	D	60	–	–	H	15
8	H	60	–	–	D	30	–	–
9	–	–	E	75	K	30	–	–

ЗАДАЧА 2

Указания: Задача на равновесие системы тел, находящихся под действием плоской системы сил. При ее решении можно или рассмотреть сначала равновесие всей системы в целом, а затем равновесие одного из тел системы, изобразив его отдельно, или же сразу расчлнить систему и рассмотреть равновесие каждого из тел в отдельности, учтя при этом закон о равенстве действия и противодействия. В задачах, где имеется жесткая заделка, учесть, что ее реакция представляется силой, модуль и направление которой неизвестны, и парой сил, момент которой тоже неизвестен.

Пример 2. На угольник ABC ($\angle ABC = 90^\circ$), конец A которого жестко заделан, в точке C опирается стержень DE (рис. 2, а). Стержень имеет в точке D неподвижную шарнирную опору и к нему приложена сила \vec{F} , а к угольнику – равномерно распределенная на участке KB нагрузка интенсивности q и пара с моментом M .

Дано: $F = 10$ кН, $M = 5$ кН·м, $q = 20$ кН/м, $a = 0,2$ м. Определить: реакции в точках A , C , D , вызванные заданными нагрузками.

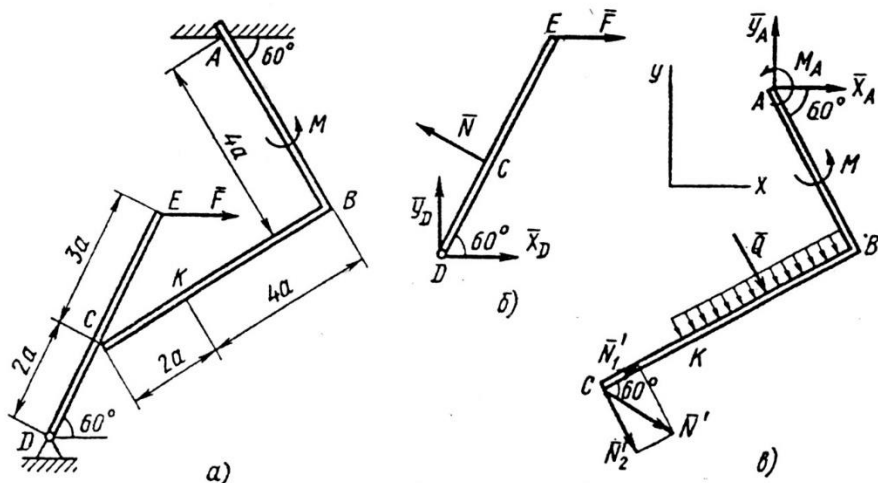


Рис. 2

Решение. 1. Для определения реакций расчленим систему и рассмотрим сначала равновесие стержня DE (рис. 2, б). Проведем координатные оси x и y и изобразим действующие на стержень силы: силу \vec{F} , реакцию \vec{N} , направленную перпендикулярно стержню, и составляющие \vec{X}_D и \vec{Y}_D реакции шарнира D . Для полученной плоской системы сил составляем три уравнения равновесия:

$$\sum F_{ix}=0, X_D + F - N\sin 60^\circ = 0; \quad (1)$$

$$\sum F_{iy}=0, Y_D + N\cos 60^\circ = 0; \quad (2)$$

$$\sum m_D(\vec{F}_k) = 0, N \cdot 2a - F5a\sin 60^\circ = 0. \quad (3)$$

2. Теперь рассмотрим равновесие угольника (рис. 2, в). На него действуют сила давления стержня \vec{N}' , направленная противоположно реакции \vec{N} , равномерно распределенная нагрузка, которую заменяем силой \vec{Q} , приложенной в середине участка KB (численно $Q = q4a = 16$ кН), пара сил с моментом M и реакция жесткой заделки, состоящая из силы, которую представим составляющими \vec{X}_A , \vec{Y}_A и пары с моментом M_A . Для этой плоской системы сил тоже составляем три уравнения равновесия:

$$\sum F_{ix}=0, X_A + Q\cos 60^\circ + N\sin 60^\circ = 0; \quad (4)$$

$$\sum F_{iy}=0, Y_A - Q\cos 60^\circ - N\cos 60^\circ = 0; \quad (5)$$

$$\sum m_A(\vec{F}_k) = 0, M_A + M + Q2a + N\cos 60^\circ \cdot 4a + N\sin 60^\circ \cdot 6a = 0. \quad (6)$$

При вычислении момента силы \vec{N}' разлагаем ее на составляющие \vec{N}'_1 и \vec{N}'_2 и применяем теорему Вариньона. Подставив в составленные уравнения числовые значения заданных величин и решив систему уравнений (1) – (6), найдем искомые реакции. При решении учитываем, что численно $N' = N$ в силу равенства действия и противодействия.

Ответ: $N = 21,7$ кН, $Y_D = -10,8$ кН; $X_D = 8,8$ кН, $X_A = -26,8$ кН, $Y_A = 24,7$ кН, $M_A = -42,6$ кН·м.

Знаки указывают, что силы \vec{Y}_D , \vec{X}_A и момент M_A направлены противоположно показанным на рисунках.

Условия

Конструкция состоит из жесткого угольника и стержня, которые в точке C или соединены друг с другом шарнирно (рис. 2.0 – 2.5), или свободно опираются друг о друга (рис. 2.6 – 2.9). Внешними связями, наложенными на конструкцию, являются в точке A или шарнир, или жесткая заделка; в точке B или гладкая плоскость (рис. 0 и 1), или невесомый стержень BB' (рис. 2 и 3), или шарнир (рис. 4–9); в точке D или невесомый стержень DD' (рис. 0, 3, 8), или шарнирная опора на катках (рис. 7).

На каждую конструкцию действуют: пара сил с моментом $M = 60$ кН·м, равномерно распределенная нагрузка интенсивности $q = 20$ кН/м и еще две силы. Эти силы, их направления и точки приложения указаны в табл. 2; там же в столбце «Нагруженный участок» указано, на каком участке действует распределенная нагрузка (например, в условиях № 1 на конструкцию действуют

сила \bar{F}_2 под углом 60° к горизонтальной оси, приложенная в точке L , сила \bar{F}_4 под углом 30° к горизонтальной оси, приложенная в точке E , и нагрузка, распределенная на участке CK).

Определить реакции связей в точках A , B , C (для рис. 0, 3, 7, 8 еще и в точке D), вызванные заданными нагрузками. При окончательных расчетах принять $a = 0,2$ м. Направление распределенной нагрузки на различных по расположению участках указано в табл. 2,а.

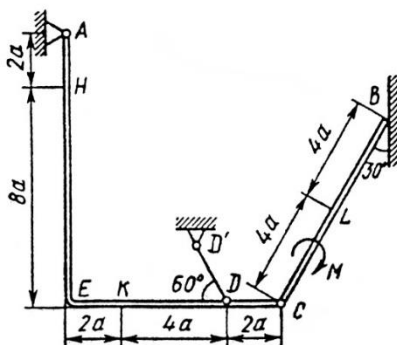


Рис. 2.0

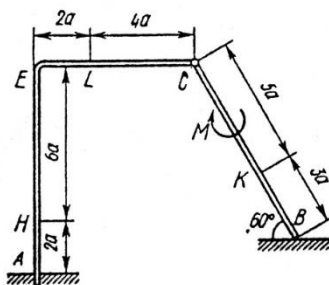


Рис. 2.1

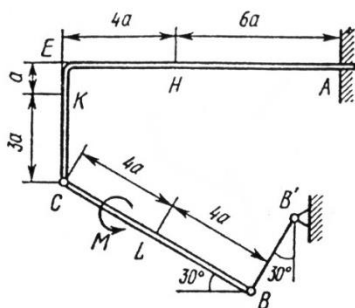


Рис. 2.2

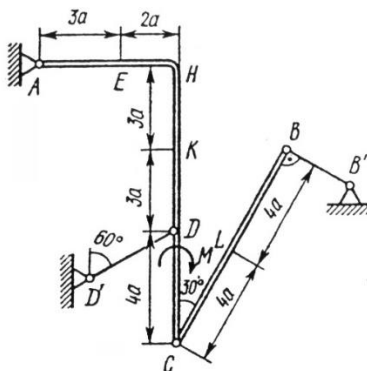


Рис. 2.3

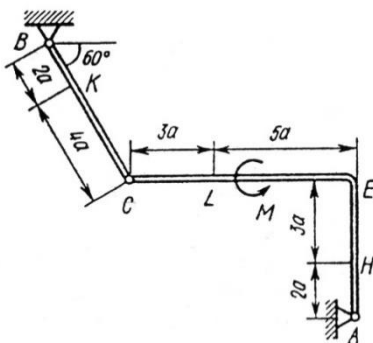


Рис. 2.4

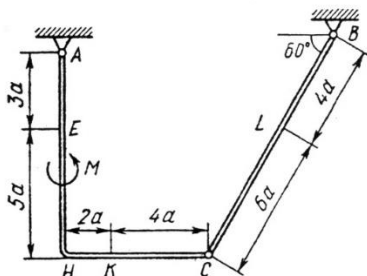


Рис. 2.5

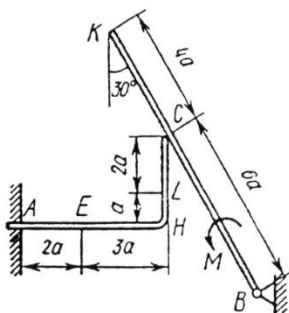


Рис. 2.6

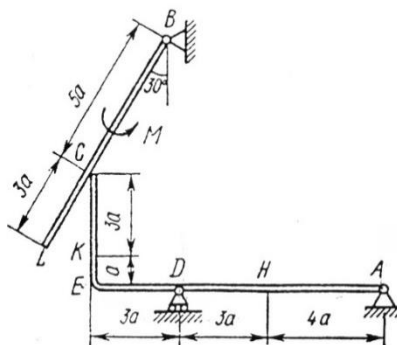


Рис. 2.7

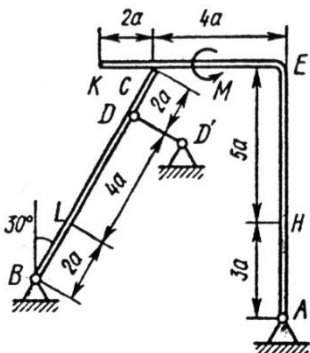


Рис. 2.8

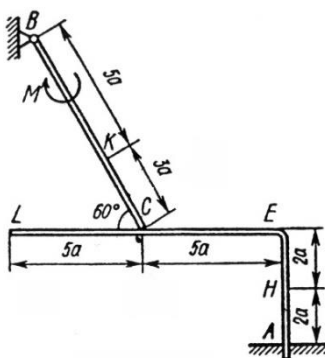


Рис. 2.9

Таблица 2


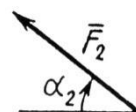
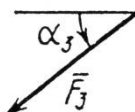
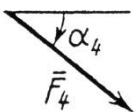
Силы									Нагруженный участок
	$F_1 = 10 \text{ кН}$		$F_2 = 20 \text{ кН}$		$F_3 = 30 \text{ кН}$		$F_4 = 40 \text{ кН}$		
	Точка приложения	α_1 , град	Точка приложения	α_2 , град	Точка приложения	α_3 , град	Точка приложения	α_4 , град	
0	<i>K</i>	<i>60</i>	—	—	<i>H</i>	<i>30</i>	—	—	<i>CL</i>
1	—	—	<i>L</i>	<i>60</i>	—	—	<i>E</i>	<i>30</i>	<i>CK</i>
2	<i>L</i>	<i>15</i>	—	—	<i>K</i>	<i>60</i>	—	—	<i>AE</i>
3	—	—	<i>K</i>	<i>30</i>	—	—	<i>H</i>	<i>60</i>	<i>CL</i>
4	<i>L</i>	<i>30</i>	—	—	<i>E</i>	<i>60</i>	—	—	<i>CK</i>
5	—	—	<i>L</i>	<i>75</i>	—	—	<i>K</i>	<i>30</i>	<i>AE</i>
6	<i>E</i>	<i>60</i>	—	—	<i>K</i>	<i>75</i>	—	—	<i>CL</i>
7	—	—	<i>H</i>	<i>60</i>	<i>L</i>	<i>30</i>	—	—	<i>CK</i>
8	—	—	<i>K</i>	<i>30</i>	—	—	<i>E</i>	<i>15</i>	<i>CL</i>
9	<i>H</i>	<i>30</i>	—	—	—	—	<i>L</i>	<i>60</i>	<i>CK</i>

Таблица 2,а

Участок на угольнике		Участок на стержне	
горизонтальный	вертикальный	рис. 0, 3, 5, 7, 8	рис. 1, 2, 4, 6, 9
			

ЗАДАЧА 3

Указания: Усилия в стержнях фермы можно определить двумя способами: методом вырезания узлов и методом сечения (метод Риттера).

Метод вырезания узлов состоит в следующем: последовательно рассматривается равновесие всех узлов фермы, находящиеся под действием внешних сил и реакций перерезанных стержней. К каждому узлу приложена плоская система сходящихся сил, для которой можно составить два уравнения равновесия. Расчёт целесообразно начинать с того узла, где сходятся два стержня. При этом одно уравнение равновесия предпоследнего узла и два уравнения последнего узла являются проверочными.

Метод Риттера состоит в следующем: ферма, к которой приложены внешние силы, включая реакции опор, рассекается на две части по трём стержням, если это возможно. В число перерезанных стержней должны входить те усилия, которые требуется определить. Одна из частей фермы отбрасывается. Действие отброшенной части на оставшуюся заменяется неизвестными реакциями. Рассматривается равновесие оставшейся части. Уравнения равновесия составляются так, чтобы в каждое из них входило только одно неизвестное. Это достигается специальным выбором уравнений: при составлении уравнения моментов моментная точка выбирается там, где пересекаются линии действия двух неизвестных усилий, которые в данный момент не определяются. При составлении уравнения проекций ось проекций выбирается перпендикулярно двум параллельным усилиям.

При составлении уравнений равновесия обоими методами предполагается, что все стержни растянуты. Если результат получается со знаком минус, стержень сжат.

Пример 3. Определить опорные реакции и усилия в стержнях фермы, если $F=20$ кН, $P=20$ кН, $\alpha=60^\circ$, $Q=30$ кН.(рис. 3, 3.а).

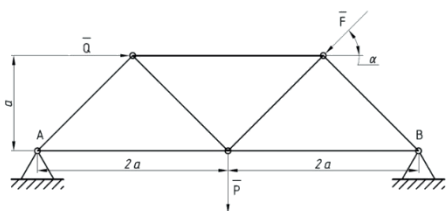


Рис. 3

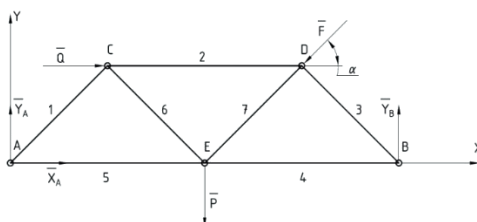


Рис. 3,а

Определяем опорные реакции, рассматривая равновесие системы в целом (рис.3,а).

$$\sum X = 0: X_A - F \cdot \cos \alpha + Q = 0;$$

$$\sum H = 0: Y_A + Y_B - P - F \cdot \sin \alpha = 0;$$

$$\sum M_A = 0: -Q \cdot a - P \cdot 2a - F \cdot \sin \alpha \cdot 3a + F \cdot \cos \alpha \cdot a + Y_B \cdot 4a = 0.$$

Решая эти уравнения, находим:

$$X_A = -20 \text{ кН}; Y_A = 9.33 \text{ кН}; Y_B = 28 \text{ кН}.$$

Проверим правильность полученных результатов. Для этого составим сумму моментов сил относительно точки С.

$$\begin{aligned} \sum M_C &= X_A \cdot a - Y_A \cdot a - P \cdot a - F \cdot \sin \alpha \cdot 2a + Y_B \cdot 3a = \\ &= (-20 - 9.33 - 20 - 20 \cdot 1.73 + 28 \cdot 3) \cdot a = 0. \end{aligned}$$

Переходим к определению усилий в стержнях фермы.

Метод вырезания узлов.

Начинаем расчёт с узла А, где сходятся два стержня. Следует изобразить тот узел, равновесие которого рассматривается (рис.3,б). Так как мы предполагаем, что все стержни растянуты, реакции стержней направляем от узла (S_1 и S_5). Тогда усилия в стержнях (реакции шарнира) будут направлены в противоположную сторону.

Для узла А составляем два уравнения равновесия:

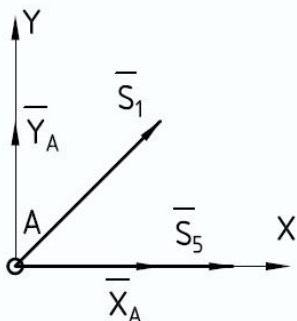


Рис. 3,б

$$\sum X = 0: +X_A + S_5 + S_1 \cdot \cos 45^\circ = 0;$$

$$\sum Y = 0: Y_A + S_1 \cdot \cos 45^\circ = 0.$$

Получаем: $S_1 = -13.2 \text{ кН};$

$S_2 = 29.32 \text{ кН}$

Далее рассматриваем равновесие узла С

Уравнения равновесия:

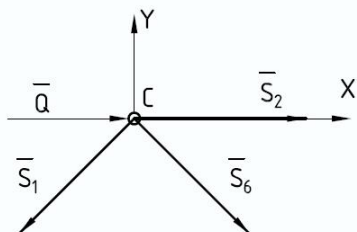


Рис. 3,в

$$\sum X = 0: Q + S_2 + S_6 \cdot \cos 45^\circ - S_1 \cdot \cos 45^\circ = 0;$$

$$\sum Y = 0: -S_1 \cdot \cos 45^\circ - S_6 \cdot \cos 45^\circ = 0.$$

При подстановке значения S_1 учитываем, что усилие отрицательное.

Получаем: $S_6 = 13.2 \text{ kH}$; $S_2 = -48.7 \text{ kH}$

Аналогично рассчитываются остальные узлы (Рис. 3.г, 3.д).

$$\sum X = 0: -S_2 - S_7 \cdot \cos 45^\circ - S_3 \cdot \cos 45^\circ - F \cdot \cos \alpha = 0;$$

$$\sum Y = 0: -S_7 \cdot \cos 45^\circ - S_3 \cdot \cos 45^\circ - F \cdot \sin \alpha = 0.$$

Отсюда: $S_3 = -39.2 \text{ kH}$; $S_7 = 15.13 \text{ kH}$

$$\sum X = 0: -S_4 - S_3 \cdot \cos 45^\circ = 0;$$

Второе уравнение проверочное:

$$\sum Y = +Y_B + S_3 \cdot \cos 45^\circ = 28 - 39.6 \cdot 0.71 = 0.$$

$$S_4 = 28.0 \text{ kH}.$$

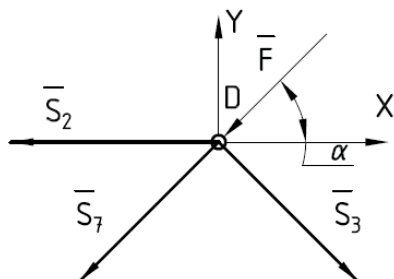


Рис. 3,г

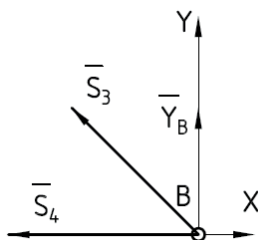


Рис. 3,д

Для проверки рассмотрим равновесие узла Е. (Рис. 3.е)

$$\sum X = -S_5 + S_4 - S_6 \cdot \cos 45^\circ + S_7 \cdot \cos 45^\circ = 0;$$

$$\sum Y = S_6 \cdot \cos 45^\circ + S_7 \cdot \cos 45^\circ - P = 0.$$

Так как уравнения обратились в тождества, то расчёт сделан верно.

Метод сечения (метод Риттера).

Метод Риттера удобно использовать, если требуется определить усилия не во всех стержнях, и как проверочный, так как он позволяет определить каждое усилие независимо от остальных.

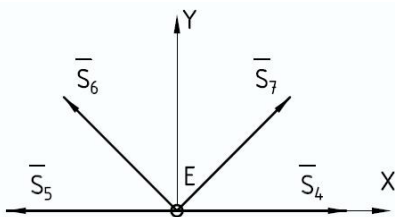


Рис. 3,е

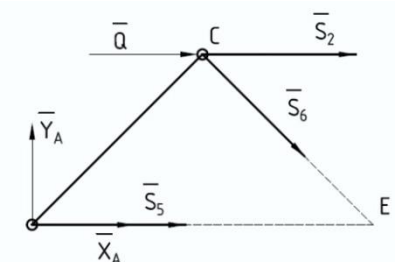


Рис. 3,ж

Определим усилия в стержнях 2, 6, 5. Разрезаем ферму на две части по стержням 2, 6, 5. Отбрасываем правую часть и рассматриваем равновесие левой

Для определения усилия S_5 составляем уравнение моментов относительно точки, где пересекаются силы S_2 и S_6 (точка C).

$$\sum M_C = 0: X_A \cdot a - Y_A \cdot a + S_5 \cdot a = 0;$$

$$S_5 = 29.32 \text{ kN.}$$

Для определения усилия S_2 составляем уравнение моментов относительно точки E:

$$\sum M_E = 0: -Q \cdot a - S_2 \cdot a - Y_A \cdot 2a = 0;$$

$$S_2 = 48.64 \text{ kN.}$$

Для определения усилия S_6 следует составить уравнение проекций на ось Y:

$$\sum Y = 0: -S_6 \cdot \cos 45^\circ + Y_A = 0;$$

$$S_6 = 13.2 \text{ kN.}$$

Результаты следует занести в таблицу

Усилия в стержнях фермы, кН							
№ стержня, способ	1	2	3	4	5	6	7
Способ вырезания узлов	-13,2	-48,7	39,6	28,0	29,32	13,2	15,3
Способ Риттера		-48,64			29,32	13,2	

Условия

Найти реакции опор фермы от заданной нагрузки, а также усилия во всех стержнях.

Таблица 3

№ варианта	P1, кН	P2, кН	P3, кН	a, м	h, м
1	50	60	100	2,4	3,0
2	60	80	120	3,0	3,6
3	80	100	50	3,6	4,0
4	100	120	60	4,0	4,2
5	120	50	80	4,2	3,0
6	100	100	60	3,0	3,0
7	80	80	120	3,0	4,0
8	60	60	120	4,2	4,0
9	50	100	100	4,0	3,6
0	100	50	50	3,5	4,0

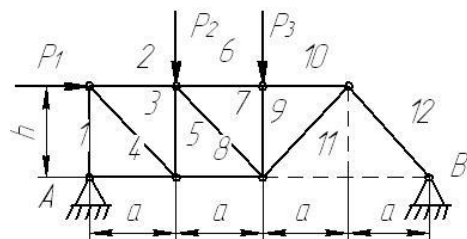


Рис. 3.1

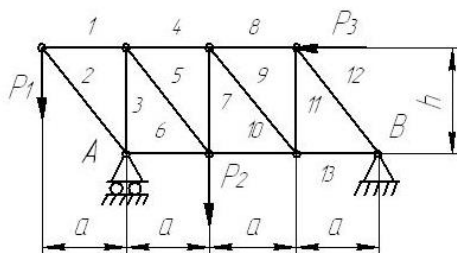


Рис. 3.2

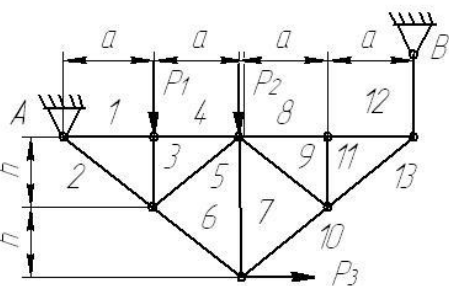


Рис. 3.3

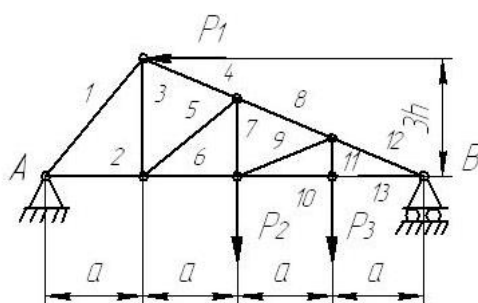


Рис. 3.4

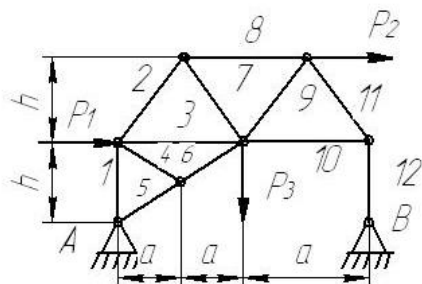


Рис. 3.5

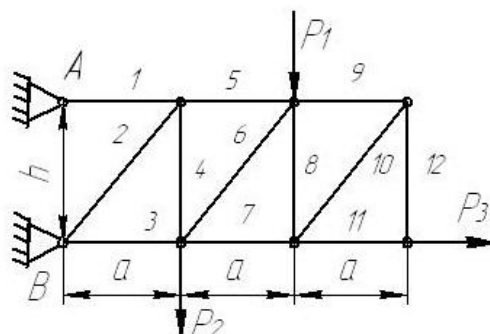


Рис. 3.6

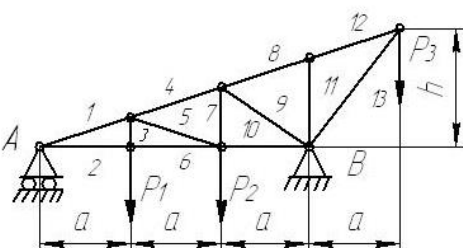


Рис. 3.7

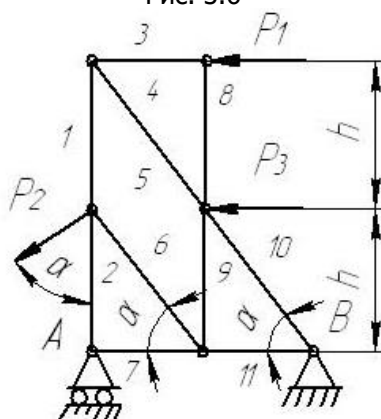


Рис. 3.8

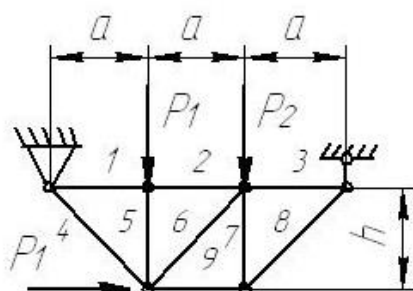


Рис. 3.9

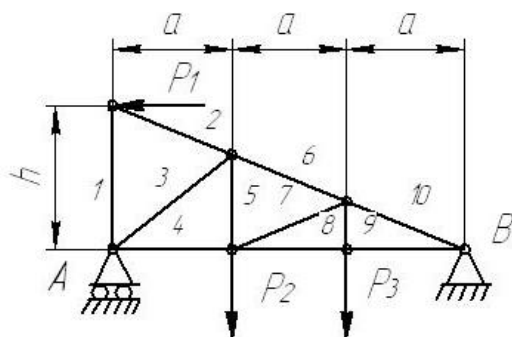


Рис. 3.10

ЗАДАЧА 4

Указания. Задача 4 – на равновесие тела под действием произвольной пространственной системы сил. При ее решении учесть, что реакция сферического шарнира (подпятника) имеет три составляющие (по всем трем координатным осям), а реакция цилиндрического шарнира (подшипника) – две составляющие, лежащие в плоскости, перпендикулярной оси шарнира (подшипника). При вычислении момента силы \vec{F} часто удобно разложить ее на две составляющие \vec{F}' и \vec{F}'' , параллельные координатным осям (или на три); тогда, по теореме Вариньона, $m_x(\vec{F}) = m_x(\vec{F}') + m_x(\vec{F}'')$ и т. д.

Пример 4. Горизонтальная прямоугольная плита весом P (рис. 4) закреплена сферическим шарниром в точке A , цилиндрическим (подшипником) в точке B и невесомым стержнем DD' . На плиту в плоскости, параллельной xz , действует сила \vec{F} , а в плоскости, параллельной yz , – пара сил с моментом M .

Дано: $P = 3$ кН, $F = 8$ кН, $M = 4$ кН·м, $\alpha = 60^\circ$, $AC = 0,8$ м, $AB = 1,2$ м, $BE = 0,4$ м, $EH = 0,4$ м. Определить: реакции опор A , B и стержня DD' .

Решение. 1. Рассмотрим равновесие плиты. На плиту действуют заданные силы \vec{P} , \vec{F} и пара с моментом M , а также реакции связей. Реакцию сферического шарнира разложим на три составляющие \vec{X}_A , \vec{Y}_A , \vec{Z}_A , цилиндрического (подшипника) – на две составляющие \vec{X}_B , \vec{Z}_B (в плоскости, перпендикулярной оси подшипника); реакцию \vec{N} стержня направляем вдоль стержня от D к D' , предполагая, что он растянут.

2. Для определения шести неизвестных реакций составляем шесть уравнений равновесия действующей на плиту пространственной системы сил:

$$\sum F_{kx} = 0, X_A + X_B + F \cos 60^\circ = 0; \quad (1)$$

$$\sum F_{ky} = 0, Y_A - N \cos 30^\circ = 0; \quad (2)$$

$$\sum F_{kz} = 0, Z_A + Z_B - P + N \sin 30^\circ - F \sin 60^\circ = 0; \quad (3)$$

$$\sum m_x(\bar{F}_k) = 0, M - P \cdot AB / 2 + Z_B \cdot AB - F \sin 60^\circ \cdot AB + N \sin 30^\circ \cdot AB = 0; (4)$$

$$\sum m_y(\bar{F}_k) = 0, P \cdot AC / 2 - N \sin 30^\circ \cdot AC + F \sin 60^\circ \cdot AC / 2 - F \cos 60^\circ \cdot BE = 0; (5)$$

$$\sum m_z(\bar{F}_k) = 0, -F \cos 60^\circ \cdot AB - N \cos 30^\circ \cdot AC - X_B \cdot AB = 0. (6)$$

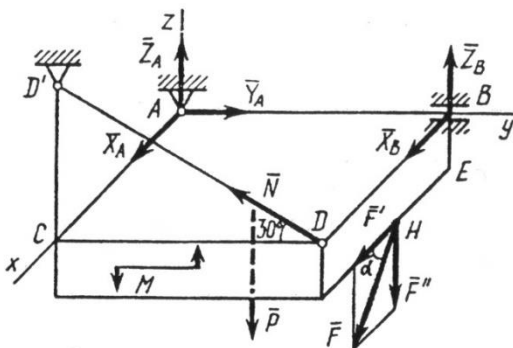


Рис. 4

Для определения моментов силы \bar{F} относительно осей разлагаем ее на составляющие \bar{F}' и \bar{F}'' , параллельные осям x и z ($F' = F \cos \alpha$, $F'' = F \sin \alpha$), и применяем теорему Вариньона (см. «Указания»). Аналогично можно поступить при определении моментов реакции \bar{N} .

Подставив в составленные уравнения числовые значения всех заданных величин и решив эти уравнения, найдем искомые реакции.

Ответ: $X_A = 3,4$ кН; $Y_A = 5,1$ кН; $Z_A = 4,8$ кН; $X_B = -7,4$ кН; $Z_B = 2,1$ кН; $N = 5,9$ кН. Знак минус указывает, что реакция \bar{X}_B направлена противоположно показанной на рис. 4.

Условия

Две однородные прямоугольные тонкие плиты жестко соединены (сварены) под прямым углом друг к другу и закреплены сферическим шарниром (или подпятником) в точке A , цилиндрическим шарниром (подшипником) в точке B и невесомым стержнем 1 (рис. 4.0 – 4.7) или же двумя подшипниками в точках A и B и двумя невесомыми стержнями 1 и 2 (рис. 4.8, 4.9); все стержни прикреплены к плитам и к неподвижным опорам шарнирами.

Размеры плит указаны на рисунках; вес большей плиты $P_1 = 5$ кН, вес меньшей плиты $P_2 = 3$ кН. Каждая из плит расположена параллельно одной из координатных плоскостей (плоскость xu – горизонтальная).

На плиты действуют пара сил с моментом $M = 4$ кН·м, лежащая в плоскости одной из плит, и две силы. Значения этих сил, их направления и точки приложения указаны в табл. С4; при этом силы \bar{F}_1 и \bar{F}_4 лежат в плоскостях, параллельных плоскости xu , сила \bar{F}_2 – в плоскости, параллельной xz , и сила \bar{F}_3 – в плоскости, параллельной yz . Точки приложения сил (D, E, H, K) находятся в углах или в серединах сторон плит.

Определить реакции связей в точках A и B и реакцию стержня (стержней). При подсчетах принять $a = 0,6$ м.

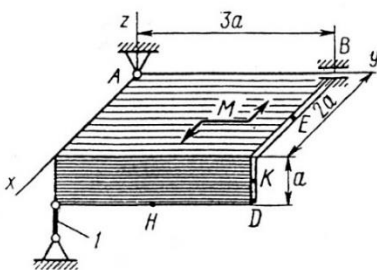


Рис. 4.0

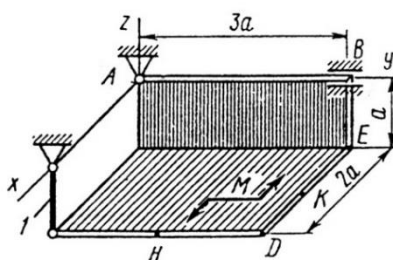


Рис. 4.1

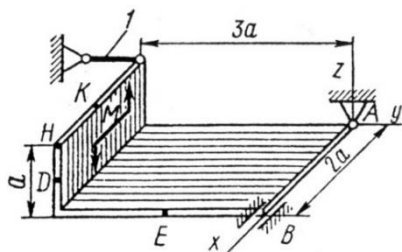


Рис. 4.2

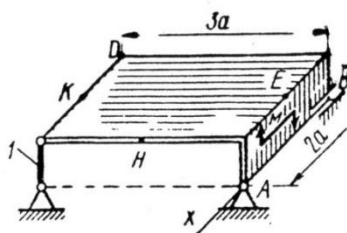


Рис. 4.3

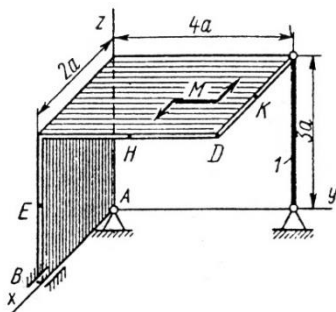


Рис. 4.4

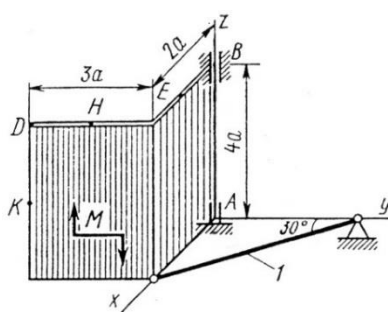


Рис. 4.5

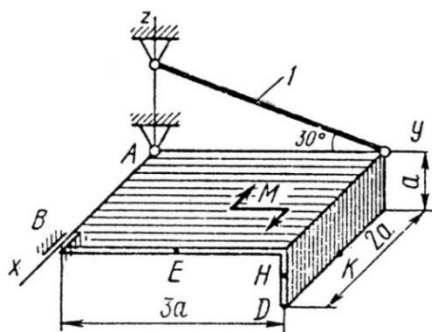


Рис. 4.6

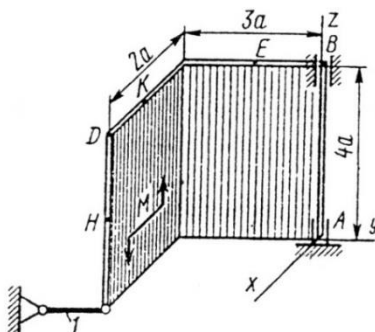


Рис. 4.7

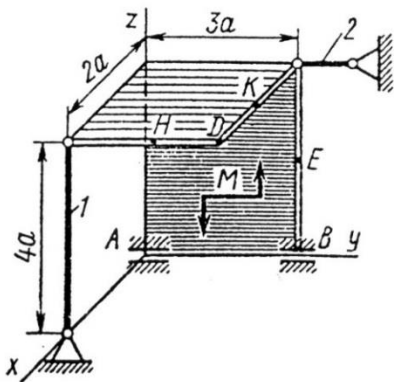


Рис.4.8

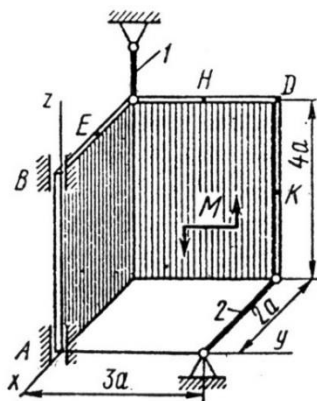


Рис. 4.9

Таблица 4

Силы								
Номер условия	$F_1 = 6 \text{ кН}$		$F_2 = 8 \text{ кН}$		$F_3 = 10 \text{ кН}$		$F_4 = 12 \text{ кН}$	
	Точка приложения	α_1 , град	Точка приложения	α_2 , град	Точка приложения	α_3 , град	Точка приложения	α_4 , град
0	E	60	H	30	—	—	—	—
1	—	—	D	60	E	30	—	—
2	—	—	—	—	K	60	E	30
3	K	30	—	—	D	0	—	—
4	—	—	E	30	—	—	D	60
5	H	0	K	60	—	—	—	—
6	—	—	H	90	D	30	—	—
7	—	—	—	—	H	60	K	90
8	D	30	—	—	K	0	—	—
9	—	—	D	90	—	—	H	30

ЗАДАЧА 5

Указания. Центр тяжести тела это такая, неизменно связанная с этим телом, точка, через которую проходит линия действия равнодействующей сил тяжести данного тела при любом положении тела в пространстве.

1. Метод симметрии. Если однородное тело имеет плоскость, ось или центр симметрии, то его центр должен находиться соответственно в этой плоскости, на оси или в центре симметрии.

2. Метод разбиения на простейшие тела. Некоторые тела сложной формы можно разбить на части, центры тяжести, которых известны или предварительно могут быть определены. В этом случае центры тяжести сложных тел вычисляются по общим формулам. Только вместо элементарных частиц тела берутся его конечные части, на которое разбито тело.

Так для однородной плоскости

$$x_c = \frac{1}{F} \sum_{i=1}^n x_i F_i, \quad y_c = \frac{1}{F} \sum_{i=1}^n y_i F_i,$$

где F_i – площадь i -той части плоской фигуры, $F = \sum F_i$ – площадь всей поверхности, x_i, y_i – координаты центров тяжести i -той фигуры.

Пример 5.а. Плоскую фигуру изображенную на рис.5,а, можно разбить на три части, центры тяжести которых C_1 и C_2 известны. Они находятся на пересечении диагоналей прямоугольников. Координаты центров тяжести (x_1, y_1) ; (x_2, y_2) ; (x_3, y_3) площади F_1, F_2, F_3 . Общая площадь сложной фигуры будет $F = F_1 + F_2 + F_3$.

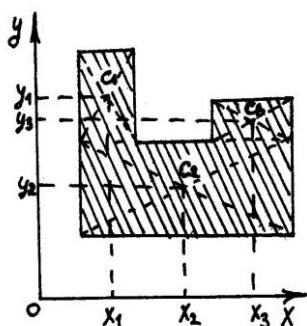


Рис.5,а

Используя определение центра тяжести и производя группировку слагаемых под знаком суммы по частям фигуры, на которые она разбита, получим:

$$x_c = \frac{x_1 F_1 + x_2 F_2 + x_3 F_3}{F_1 + F_2 + F_3} ; \quad y_c = \frac{y_1 F_1 + y_2 F_2 + y_3 F_3}{F_1 + F_2 + F_3} .$$

3. Метод отрицательных масс. Этот способ является видоизменением метода разбиения на части и применяется к телам, имеющим отверстия, если координаты центров масс (центров тяжести) тела без отверстия и отверстий известны. В отличие от обычного метода разбиения на части в формулах (16) площади отверстий входят со знаком минус.

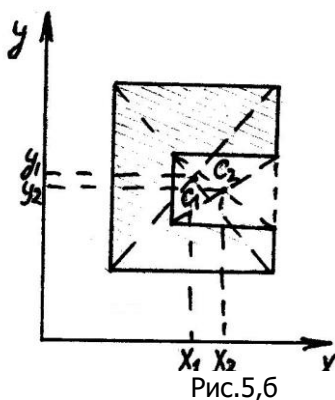


Рис.5,6

Пример 5.6. Для определения плоской фигуры, изображенной на рис.5,6, ее можно разбить на три части. Можно сделать иначе. Дополним нашу фигуру до прямоугольника и примем, что этот прямоугольник с площадью F_1 и центром масс C_1 полностью заполнен массой (имеет положительную площадь). Часть фигуры, которую добавили, имеет отрицательную площадь той же плотности. Площадь этой фигуры обозначим F_2 , а ее центр масс C_2 . Применим метод разбиения на части координаты центра тяжести и определим по

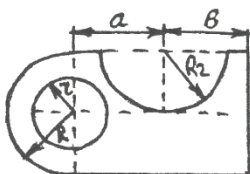
формулам:

$$x_c = \frac{x_1 F_1 + x_2 (-F_2)}{F_1 + (-F_2)} ; \quad y_c = \frac{y_1 F_1 + y_2 (-F_2)}{F_1 + (-F_2)} .$$

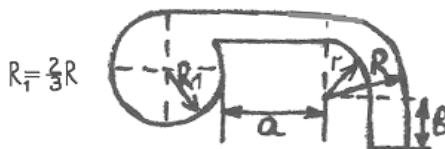
Условия

Определить центр тяжести плоской фигуры. Номер рисунка выбрать по предпоследней цифре шифра. В таблице, расположенной под рисунком выбрать условие по последней цифре шифра.

№0

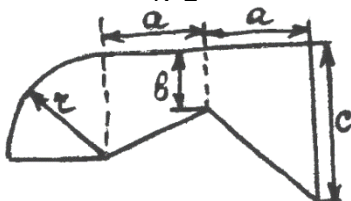


№1

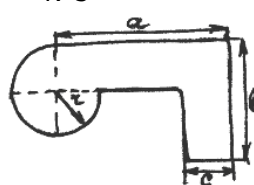


	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
R (мм)	30	30	24	30	36	12	9	18	15	12
r (мм)	15	12	12	18	18	6	6	12	12	6
a (мм)	60	50	40	54	60	16	16	24	28	19
b (мм)	40	25	40	30	42	0	10	0	6	3

№2

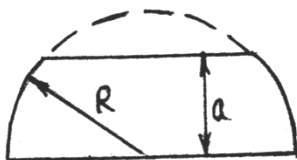


№3

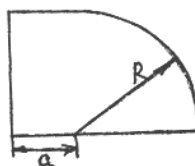


	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
r(мм)	12	15	18	21	24	30	24	27	36	21
a(мм)	18	0	72	60	80	60	54	56	12	50
b(мм)	20	20	24	50	48	24	21	20	24	18
c(мм)	12	16	16	10	20	30	30	28	25	24

№4

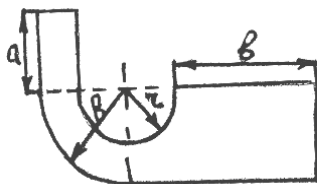


№5

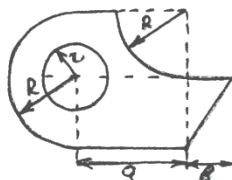


	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
R(мм)	20	45	24	45	30	27	24	21	16	30
a(мм)	10	20	13	35	15	12	15	10	12	20

№6

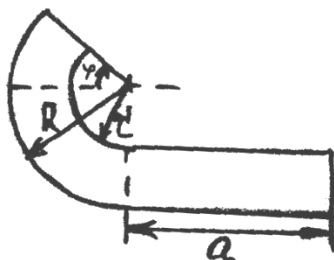


№7

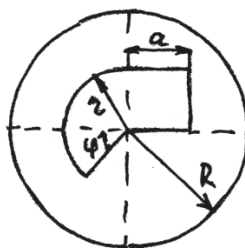


	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
R(мм)	30	27	24	21	18	60	60	54	54	30
r(мм)	15	15	12	12	9	30	42	27	30	18
a(мм)	60	50	60	48	40	120	100	90	100	60
b(мм)	100	80	92	84	72	20	20	30	28	40

№8



№9



Теоретическая механика

№	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\varphi(\text{рад})$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$	π
R(мм)	30	27	24	30	27	21	27	24	30	18
r(мм)	18	12	18	15	15	10	15	12	15	10
a(мм)	20	16	20	18	12	20	10	16	30	16